De gelijkheid van EULER (Basel, 1707 – Sint-Petersburg, 1783)

(Tichvin-begraafplaats bij het Alexander Nevski-klooster)

$$e^{i.\pi} = -1$$

Dit volgt uit de formule van Euler :

$e^{i.\varphi} = \cos(\varphi) + i.\sin(\varphi)$ voor $\varphi = \pi$ (radialen) = $\cos(\pi) + i.\sin(\pi) = -1 + i.0 = -1$

Dit is toch het ultieme toppunt van wiskundige magie.

Bedenk dat het getal $\boldsymbol{e}$ het grondtal is van de exponentiële functie, waarvan de afgeleide functie gelijk is aan de functie zelf. En dit geldt voor geen enkele andere van de oneindig vele reële functies. Het is uiteraard een irrationaal getal en gelijk aan
2,71 828 182 845 904 523 536 028 747 135 266 249 775 724 709 369 995…
met een oneindig aantal cijfers na de komma.

Het getal π (de verhouding van de omtrek van een cirkel en zijn diameter) is ook een van de meeste bekende irrationale getallen. Het is gelijk aan
3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 ….
eveneens met een oneidig aantal cijfers na de komma.
In 2021 is men er in geslaagd om het getal te berekenen tot 62,8 biljoen cijfers na de komma.

En het getal $\boldsymbol{i}$ is gelijk aan $\sqrt{-1}$. Het getal $\boldsymbol{i}$ is zelfs geen reëel getal, maar een imaginair getal (vandaar de $\boldsymbol{i}$). Het ligt dus niet op de reële getallen-as, maar in het complexe vlak met coördinaat (0,1). En vermits (0,1).(0,1) = (-1,0) is $i^2 = -1$ en vandaar dat $i = \sqrt{-1}$.

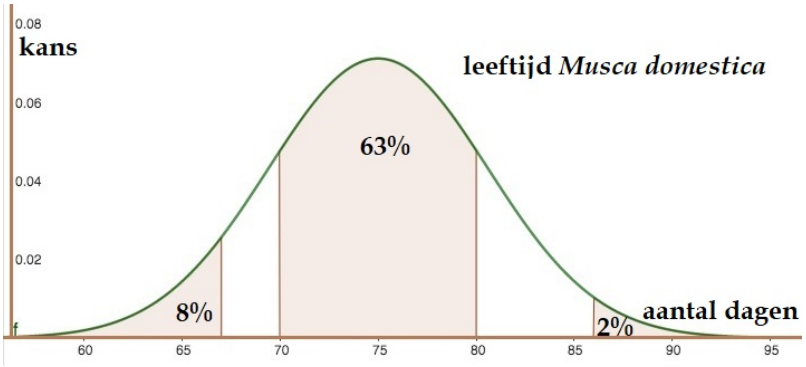
En toch is $e^{i.\pi} = -1$, gewoon een eenvoudig geheel getal zonder één cijfer na de komma. Alleen kijken naar deze gelijkheid wekt toch al een verwondering op.

En het getal $\boldsymbol{e}$ (van ***E***uler) heeft wel degelijk praktische en zeer nuttige toepassingen, o.a. in de kansrekening en fysica. Ik geef drie praktische en begrijpbare voorbeelden.

1. In de curve van Gauss komt het getal $\boldsymbol{e}$ voor. Deze wordt gebruikt in de kansberekening van een normaalverdeling met μ als gemiddelde en σ als standaarddeviatie (maat voor de spreiding).

Het is grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

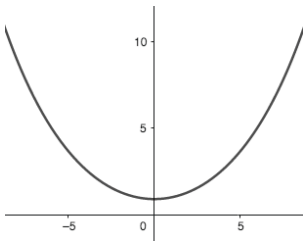
met μ het gemiddelde en σ de standaarddeviatie.
Als je bijvoorbeeld weet dat de gemiddelde leeftijd van een vlieg (meer bepaald de huisvlieg, *Musca domestica*) 75 dagen is met een standaardafwijking van 5,6, kun je berekenen dat 63% van deze vliegen (die niet onder een krant zijn terecht gekomen en niet in de geleipot belanden) een leeftijd hebben tussen 70 en 80 dagen; dat ongeveer 8% van deze vliegen maximaal 67 dagen leven en nog geen 2% langer dan 86 dagen. En deze boeiende informatie hebben we te danken aan de Duitser Gauss (1777 – 1855), die op 10-jarige leeftijd zijn onderwijzer al (terecht) op zijn zenuwen werkte. *Hij telde - tot verbazing van zijn onderwijzer - de getallen van 1 tot en met 100 op in 3 seconden, terwijl de onderwijzer deze opdracht had gegeven om de leerlingen een half uurtje "stil te houden". (Euler maakte gebruik van de formule voor de som van een termen van een rekenkundige rij.)*

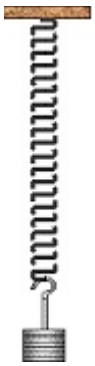


2. Hang eens een licht sierlijk kettinkje op aan twee even hoge punten. Als dat mooi onder zijn eigen gewicht verticaal naar beneden hangt, heeft dat de vorm van een kettinglijn (uiteraard). En de vergelijking van deze kettinglijn is

$f(x) = \frac{a}{2}.\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ met a een constante eigen aan de ketting. Met deze $\boldsymbol{e}$-functie (en niet met parabool of gelijk welke andere functie) kan men - met de juiste waarde van a - de vorm van iedere hangende ketting weergeven.

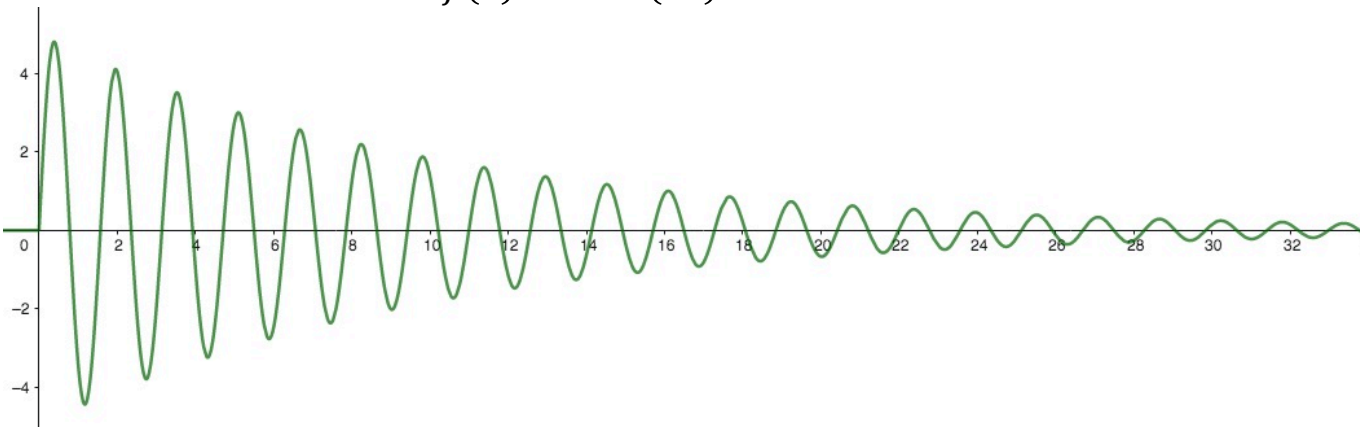






3. Nog een mooie $\boldsymbol{e}$-functie, in combinatie met een sinusfunctie, geeft de uitwijking weer van een opgehangen veer die terug tot stilstand komt na inwerking van een verticale kracht. Het voorschrift van de functie die onderstaande grafiek weergeeft is

$$f(x) = 5.\sin(4x).e^{-\frac{x}{10}}$$



Het getal $\boldsymbol{e}$ heeft dus ook heel wat toepassingen in de natuur en de fysica, het is het natuurlijk grondtal van de exponentiële functies en het logaritme-stelsel met $\boldsymbol{e}$ als grondtal wordt het "*logarithmus naturalis*" genoemd en afgekort tot "***ln***" (in plaats van ${}^{e}log$).

$$\boldsymbol{e}^{groeten}, L^2$$